试卷类型

潍坊市高考模拟考试

数学

2024.3

本试卷共 4 页．满分 150 分．考试时间 120 分钟．

注意事项：

1．答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名．

2．回答选择题时，选出每小题答案后、用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回．

一、单项选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知平面向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-1,\lambda)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$,则实数 $\lambda=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．2

2．已知抛物线 $C:x^2=y$ 上点 M 的纵坐标为 1，则 M 到 C 的焦点的距离为（　　）

A．1　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

3．已知集合 $A=\left\{x|\log_3(2x+1)=2\right\}$,集合 $B=\{2,a\}$,其中 $a\in\mathbf{R}$．若 $A\cup B=B$,则 $a=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．已知等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 $S_n,a_1=-1,S_1=5a_4+10$,则 $S_4=$（　　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．10

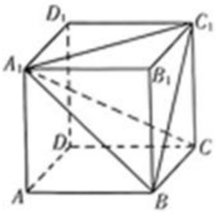
5．12 世纪以前的某时期．盛行欧洲的罗马数码采用的是简单累数制进行记数，现在一些场合还在使用，比如书本的卷数、老式表盘等．罗马数字用七个大写的拉丁文字母表示数目：

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

例如：58=LVIII，464=CCCCLXIIII．依据此记数方法，MMXXXV=（　　）

A．2025　　B．2035　　C．2050　　D．2055

6．如图所示，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为截面 A_1C_1B 上的动点，若 $DP\perp A_1C$,则点 P 的轨迹长度是（　　）



A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

7．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0,a_2=1$．若数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是公比为2的等比数列，则$a_{2004}=$（　　）

A．$\frac{2^{2023}+1}{3}$　　B．$\frac{2^{2024}+1}{3}$　　C．$2^{1012}-1$　　D．$2^{1011}-1$

8．已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$外接球的直径为6，且$AB\perp BC,BC=2$,则该棱柱体积的最大值为（　　）

A．8　　B．12　　C．16　　D．24

二、多项选择题：本大题共3个小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，选对但不全的得部分分，有选错的得0分．

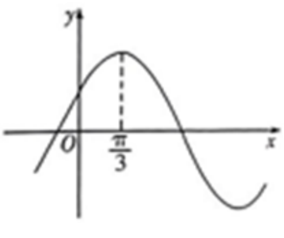
9．某科技攻关青年团队有6人，他们年龄分布的茎叶图如右图所示．已知这6人年龄的极差为14，则（　　）

2	a
3	6 6 2 0
4	2

A．$a=8$　　　　B．6人年龄的平均数为35

C．6人年龄的75%分位数为36　　D．6人年龄的方差为$\frac{64}{3}$

10．函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x-1(0<\omega<1)$的图象如图所示，则（　　）



A．$f(x)$的最小正周期为2π

B．$y=f\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$是奇函数

C．$y=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{12}$对称

D．若 $y=f(tx)(t>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有两个零点，则 $t\in\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$

11．已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$,记 $g(x)=f'(x)$,且 $f(x)-f(-x)=2x$,

$g(x)+g(2-x)=0$,则（　　）

A．$g(0)=1$　　　　B．$y=\frac{f(x)}{x}$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称

C．$f(x)+f(2-x)=0$　　　　D．$\sum_{k=1}^{n}g(k)=\frac{n-n^2}{2}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$

三、填空题：本大题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．已知 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $(2+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$,则 $\frac{z}{2-\mathrm{i}}=$____________．

13．第 40 届潍坊国际风筝会期间，某学校派 5 人参加连续 6 天的志愿服务活动，其中甲连续参加 2 天，其他人各参加 1 天，则不同的安排方法有____________种．（结果用数值表示）

14．已知平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1:y=2x,l_2:y=-2x$,点 P 为平面内一动点，过 P 作 $DP\parallel l_2$ 交 l_1 于 D,作 $EP\parallel l_1$,交 l_2 于 E,得到的平行四边形 $ODPE$ 面积为 1,记点 P 的轨迹为曲线 Γ . 若 Γ 与圆 $x^2+y^2=t$ 有四个交点，则实数 t 的取值范围是____________．

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $a(\sin B+\cos B)=c$.

（1）求 A；

（2）若 $c=\sqrt{2},a=\sqrt{5},D$ 为 BC 的中点，求 AD .

16．（15 分）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中，点 A,C 分别是 E 的左、上顶点，$|AC|=\sqrt{5}$ ，且 E 的焦距为 $2\sqrt{3}$.

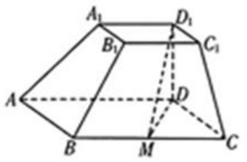
（1）求 E 的方程和离心率；

（2）过点 $(1,0)$ 且斜率不为零的直线交椭圆于 R,S 两点，设直线 RS,CR,CS 的斜率分别为 k,k_1,k_2 ,若 $k_1+k_2=-3$，求 k 的值．

17．（15 分）

如图，在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下底面 $ABCD$ 是平行四边形，

$\angle ABC=120°,AB=2A_1B_1=2,BC=8,A_1A=4\sqrt{2}$, $DD_1\perp DC,M$ 为 BC 的中点．



（1）求证：平面 $CDD_1C_1 \perp$ 平面 D_1DM；

（2）若 $D_1D=4$,求直线 DM 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

18.（17 分）

若 ξ,η 是样本空间 Ω 上的两个离散型随机变量，则称 (ξ,η) 是 Ω 上的二维离散型随机变量或二维随机向量. 设 (ξ,η) 的一切可能取值为 $\left(a_i,b_j\right),i,j=1,2,\cdots$,记 $p_{\bar{\eta}}$ 表示 $\left(a_i,b_j\right)$ 在 Ω 中出现的概率，其中

$$p_{\bar{\eta}}=P\left(\xi=a_i,\eta=b_j\right)=P\left[\left(\xi=a_i\right)\cap\left(\eta=b_j\right)\right].$$

（1）将三个相同的小球等可能地放入编号为 1,2,3 的三个盒子中，记 1 号盒子中的小球个数为 ξ，2 号盒子中的小球个数为 η，则 (ξ,η) 是一个二维随机变量.

①写出该二维离散型随机变量 (ξ,η) 的所有可能取值；

②若 (m,n) 是①中的值，求 $P(\xi=m,\eta=n)$（结果用 m,n 表示）；

（2）$P\left(\xi=a_i\right)$ 称为二维离散型随机变量 (ξ,η) 关于 ξ 的边缘分布律或边际分布律，求证：$P\left(\xi=a_i\right)=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{\bar{\eta}}$.

19.（17 分）

已知函数 $f(x)=2m\ln x-x+\dfrac{1}{x}(m>0)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：$\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)<\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\left(n\in\mathrm{N}^*,n\geq 2\right)$；

（3）若函数 $g(x)=m^2\ln^2 x-x-\dfrac{1}{x}+2$ 有三个不同的零点，求 m 的取值范围.