日照市2021级高三模拟考试

数学答案

2024.02

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1-5 DBABB　6-8DDC

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9.AC　　10.ACD　　11.ACD

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12.7　　13.$(-\infty,1]$　　14. 5 ，$\frac{4\sqrt{2}}{3}$

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15．（13分）解：（1）依题意，$\sqrt{2}a-2b\sin A=0$，

由正弦定理得$\sqrt{2}\sin A-2\sin B\sin A=0$，

由于锐角三角形中$0<A<\frac{\pi}{2},\sin A>0$，所以$\sqrt{2}-2\sin B=0,\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

而B是锐角，所以$B=\frac{\pi}{4}$.……………………………………………………………3分

由余弦定理得$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{25+32-2\times5\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{17}$.…………6分

（2）由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25+17-32}{2\times5\times\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$，……………………… 8分

而C是锐角，所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$，

所以$\sin(2C+B)=\sin\left(2C+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2C+\cos 2C)$……………………………………10分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sin C\cos C+2\cos^2 C-1\right)$

$=\sqrt{2}\sin C\cos C+\sqrt{2}\cos^2 C-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}\times\frac{4}{\sqrt{17}}\times\frac{1}{\sqrt{17}}+\sqrt{2}\times\frac{1}{17}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{34}$.…………………………………………………13分

16.（15分）解：（1）因为a_n,S_n,a_n^2为等差数列，所以$2S_n=a_n+a_n^2$，且$a_n>0$

当$n=1$时，$2S_1=2a_1=a_1+a_1^2$，可得$a_1=1$；…………………………………………2分

当$n\geq2$时，

$2\left(S_n-S_{n-1}\right)=2a_n=a_n+a_n^2-a_{n-1}-a_{n-1}^2$，…………………………………………………4 分

则 $a_n+a_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2=\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}\right)$；

由 $a_n+a_{n-1}>0$，故 $a_n-a_{n-1}=1$，…………………………………………………………6 分

所以 $\left\{a_n\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，故 $a_n=n$.……………………………7 分

（2）原式等价于 $\frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n}\le k\Rightarrow\frac{n}{2}+\frac{2}{n}\le k\Rightarrow\frac{1}{2}\left(n+\frac{4}{n}\right)\le k$，

因为 $\frac{1}{2}\left(n+\frac{4}{n}\right)\geqslant 2$，当且仅当 $n=2$ 时成立，所以 $b_1=0,b_2=1$，………………9 分

当 $k\ge 3$，因为 $\frac{2k-1}{2}+\frac{2}{2k-1}=k-\frac{1}{2}+\frac{2}{2k-1}\le k,\frac{2k}{2}+\frac{2}{2k}=k+\frac{1}{k}>k$，

所以能使 $\frac{n}{2}+\frac{2}{n}\le k$ 成立的 n 的最大值为 $2k-1$，

所以 $b_k=2k-1\left(k\ge 3\right)$，…………………………………………………………………13 分

所以 $\left\{b_k\right\}$ 的前 50 项和为 $0+1+5+7+\cdots+99=0+1+\frac{(5+99)\times 48}{2}=2497$.………………15 分

17．（15 分）解：（1）记“输入的问题没有语法错误”为事件 A，“一次正确应答”为事件 B，

由题意 $P(\overline{A})=0.1$，$P(B|A)=0.8$，$P\left(B|\overline{A}\right)=0.3$，则 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.9$，……3 分

$P\left(B\right)=P\left(AB\right)+P\left(\overline{A}B\right)=P\left(A\right)P\left(B|A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B|\overline{A}\right)=0.9\times 0.8+0.1\times 0.3=0.75$.……6 分

（2）依题意，$X\sim B(n,\frac{3}{4})$，

$P(X=6)=\mathrm{C}_n^6(\frac{3}{4})^6(\frac{1}{4})^{n-6}$，…………………………………………9 分

设 $f\left(n\right)=\mathrm{C}_n^6(\frac{3}{4})^6(\frac{1}{4})^{n-6}$（$n\geqslant 6$），

则 $\frac{f\left(n+1\right)}{f\left(n\right)}=\frac{\mathrm{C}_{n+1}^6(\frac{3}{4})^6(\frac{1}{4})^{n-5}}{\mathrm{C}_n^6(\frac{3}{4})^6(\frac{1}{4})^{n-6}}=\frac{n+1}{4(n-5)}$，……………………………………12 分

令 $\frac{n+1}{4(n-5)}>1$ 解得：$n<7$，所以当 $n\le 6$ 时，$f\left(n+1\right)>f\left(n\right)$，

令 $\frac{n+1}{4(n-5)}<1$ 解得：$n>7$，所以当 $n\ge 8$ 时，$f\left(n+1\right)<f\left(n\right)$，

当 $n=7$ 时，$f(7)=f(8)$，

所以 $n=7$ 或 $n=8$ 时，$f(n)$ 最大，故使 $P(X=6)$ 最大的 n 的值为 7 或 8．……15 分

18．（17 分）解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为

$(0,+\infty), f'(x)=\frac{3}{x}+2ax-4=\frac{2ax^2-4x+3}{x}$.………………2 分

又 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $2ax^2-4x+3=0, \Delta=16-24a$.

当 $\Delta\le 0$，即 $a\ge\frac{2}{3}$ 时，$2ax^2-4x+3\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，$f'(x)\ge 0$.………………4 分

当 $\Delta>0$，即 $0<a<\frac{2}{3}$ 时，方程 $2ax^2-4x+3=0$ 有两根，可求得：

$x_1=\frac{2-\sqrt{4-6a}}{2a}, x_2=\frac{2+\sqrt{4-6a}}{2a}$，

因为 $x_1+x_2=\frac{4}{2a}>0, x_1x_2=\frac{3}{2a}>0,$ 所以 $x_2>x_1>0$，

当 $x\in(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数.…………………………………………7 分

综上：当 $a\ge\frac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $0<a<\frac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2-\sqrt{4-6a}}{2a}\right)$ 和 $\left(\frac{2+\sqrt{4-6a}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增，在

$\left(\frac{2-\sqrt{4-6a}}{2a},\frac{2+\sqrt{4-6a}}{2a}\right)$ 上单调递减.…………………………………………8 分

（2）证明：当 $a=\frac{1}{2}$ 时，由（1）知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，又方程 $f(x)=b$ 有三个不相等的实数根，

可得 $0<x_1<1<x_2<3<x_3$，下证 $x_3-x_1<4$，

由 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=b$，

构造函数 $h(x)=f(x)-f(2-x)(0<x<1)$，

$h'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\frac{6(x-1)^2}{x(2-x)}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0, h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

$\therefore h(x) < h(1) = 0$，即 $f(x) - f(2-x) < 0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，

又 $x_1 \in (0,1)$，则有：$f(x_1) - f(2-x_1) < 0, \therefore f(x_2) = f(x_1) < f(2-x_1)$，

又 $\because x_2 \in (1,3), 2-x_1 \in (1,2)$，且 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

$\therefore x_2 > 2-x_1$，即 $x_1 + x_2 > 2$.……………………………………………………12 分

构造函数 $\varphi(x) = f(x) - f(6-x)(1 < x < 3)$，

$\varphi'(x) = f'(x) + f'(6-x) = \dfrac{2(x-3)^2}{x(6-x)}$，当 $x \in (1,3)$ 时 $\varphi'(x) > 0, \varphi(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增.

$\therefore \varphi(x) < \varphi(3) = 0$，即 $f(x) - f(6-x) < 0$ 在 $(1,3)$ 上恒成立.

又 $\because x_2 \in (1,3)$，则 $f(x_2) - f(6-x_2) < 0$.即 $f(x_3) = f(x_2) < f(6-x_2)$，

由 $x_2 \in (1,3), x_3 \in (3,+\infty)$，则 $6 - x_2 \in (3,5)$.

$\because f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore x_3 < 6 - x_2, x_3 + x_2 < 6$.…………………………16 分

又 $x_1 + x_2 > 2$，则可证得：$x_3 - x_1 < 4$.……………………………………………………17 分

（本题也可构造函数 $h(x) = f(x) - f(4+x)(0 < x < 1)$ 进行证明.）

19.（17 分）解：（1）①由椭圆的定义知：$|AF_1| + |AF_2| = 2a$，$|BF_1| + |BF_2| = 2a$，

所以 ΔABF_2 的周长 $L = 4a = 8$，所以 $a = 2$，椭圆离心率为 $\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$，

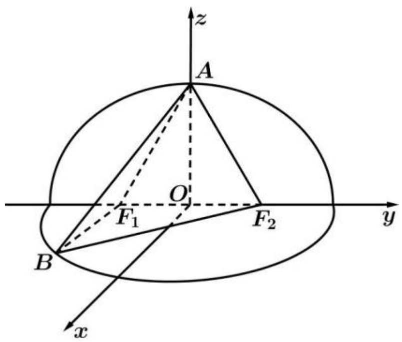
所以 $c = 1$，$b^2 = a^2 - c^2 = 3$，……………………………………………………2 分

由题意，椭圆的焦点在 x 轴上，

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，……………………………………………3 分

由直线 l：$y - 0 = \sqrt{3}(x+1)$ 与 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，

联立求得 $A(0, \sqrt{3})$，$B\left(-\dfrac{8}{5}, -\dfrac{3}{5}\sqrt{3}\right)$，（因为点 A 在 x 轴上方）…………4 分



故 $AO \perp F_1F_2$，即 $A'O \perp F_1F_2$，

平面 $A'F_1F_2 \perp$ 平面 $B'F_1F_2$，平面 $A'F_1F_2 \cap$ 平面 $B'F_1F_2 = F_1F_2$，

所以 $A'O \perp 平面 B'F_1F_2$，$B'F_2 \subset 平面 B'F_1F_2$，

所以 $A'O \perp B'F_2$.……………………………………………………6 分

②O 为坐标原点，折叠后原 y 轴负半轴，原 x 轴，原 y 轴正半轴所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $F_1\left(0,-1,0\right)$，$A'\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$B'\left(\frac{3}{5}\sqrt{3},-\frac{8}{5},0\right)$，$F_2\left(0,1,0\right)$，$\overrightarrow{A'F_2}=\left(0,1,-\sqrt{3}\right)$，

$\overrightarrow{B'F_2}=\left(-\frac{3}{5}\sqrt{3},\frac{13}{5},0\right)$.

平面 $A'F_1F_2$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$，…………………8 分

设平面 $A'B'F_2$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{F_2A'}=y-\sqrt{3}z=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{B'F_2}=-\frac{3}{5}\sqrt{3}x+\frac{13}{5}y=0\end{cases}$，

取 $y=\sqrt{3}$，得 $\overrightarrow{n_2}=(\frac{13}{3},\sqrt{3},1)$ 是平面 $A'B'F_2$ 的一个法向量，…………………10 分

记平面 $A'F_1F_2$ 和平面 $A'B'F_2$ 所成角 φ，

则 $\cos\varphi=\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{13\sqrt{205}}{205}$；

故平面 $A'F_1F_2$ 和平面 $A'B'F_2$ 所成角的余弦值 $\frac{13\sqrt{205}}{205}$ ………………11 分

（2）设折叠前 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，折叠后 A，B 在新图形中对应点记为 A'，B'，$A'\left(x_1,y_1,0\right)$，$B'\left(x_2,0,-y_2\right)$，

将直线 l 方程与椭圆方程联立 $\begin{cases}my=x+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $\left(3m^2+4\right)y^2-6my-9=0$，

$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，……………………………………………12 分

在折叠后的图形中建立如图所示的空间直角坐标系（原 x 轴仍然为 x 轴，原 y 轴正半轴为 y 轴，原 y 轴负半轴为 z 轴）；

$\left|A'B'\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+{y_1}^2+{y_2}^2}$，$\left|AB\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$，

由 $\left|A'F_2\right|+\left|B'F_2\right|+\left|A'B'\right|=\frac{15}{2}$，$\left|AF_2\right|+\left|BF_2\right|+\left|AB\right|=8$，故 $\left|AB\right|-\left|A'B'\right|=\frac{1}{2}$，

所以 $\left|AB\right|-\left|A'B'\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}-\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+{y_1}^2+{y_2}^2}=\frac{1}{2}$，（ⅰ）

又 $\frac{-2y_1y_2}{\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}+\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+{y_1}^2+{y_2}^2}}=\frac{1}{2}$，

所以$\sqrt{\left(x_1-x_1\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}+\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+y_1{}^2+y_1{}^2}=-4y_1y_2$，（ii）

由（i）（ii）可得$\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\frac{1}{4}-2y_1y_2$，

因为$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2=\left(1+m^2\right)\left(y_1-y_2\right)^2=\left(\frac{1}{4}-2y_1y_2\right)^2$，

所以$\left(1+m^2\right)\left[\left(\frac{6m}{3m^2+4}\right)^2+\frac{36}{3m^2+4}\right]=\left(\frac{1}{4}+\frac{18}{3m^2+4}\right)^2$，………………15 分

即$144\left(\frac{1+m^2}{3m^2+4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}+\frac{18}{3m^2+4}\right)^2$，所以$\frac{12+12m^2}{3m^2+4}=\frac{1}{4}+\frac{18}{3m^2+4}$，解得$m^2=\frac{28}{45}$，

因为$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以

$\tan\theta=\frac{1}{m}=\frac{3\sqrt{35}}{14}$．………………17 分